Teoría de las Probabilidades

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

La teoría de las probabilidades es el estudio de modelos para experimentos aleatorios.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Un experimento o evento es aquel que se realiza bajo determinadas condiciones o se realiza, independientemente de la voluntad del experimentador, es decir, es el conjunto de condiciones y acciones determinadas bajo las cuales se observa un determinado fenómeno.

Tipos de eventos

Un evento es el resultado posible, o el grupo de resultados posibles, de un experimento o proceso observado, y es la mínima unidad de análisis para efectos del cálculo de probabilidades.

Los eventos pueden clasificarse de la siguiente forma:

a. Mutuamente excluyentes
b. Mutuamente NO excluyentes
c. Independientes
d. Dependientes

Cálculo de probabilidades de un evento

Las técnicas de conteo nos sirven para conocer el espacio muestral que son todos los resultados posibles de un evento, y nos permiten calcular la probabilidad de un evento, sabiendo también qué tipo de evento es.

Anteriormente vimos que la probabilidad clásica de ocurrencia de un evento es:

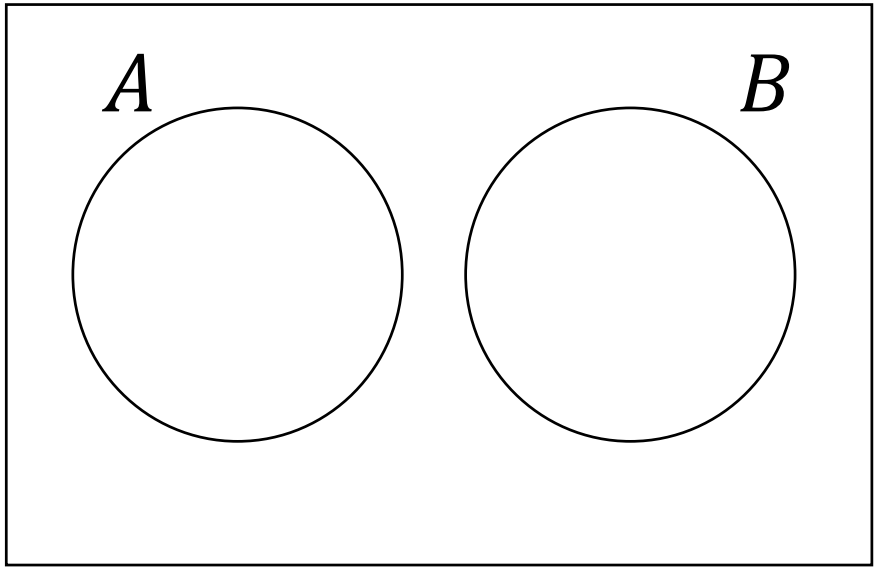
$$Probabilidad = \frac{Casos\ favorables}{Total\ de\ casos} = \frac{CF}{TC}$$

De acuerdo al tipo de evento, es el cálculo de su probabilidad de ocurrencia.

Eventos mutuamente excluyentes

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos en los que si un evento sucede significa que el otro no puede ocurrir.

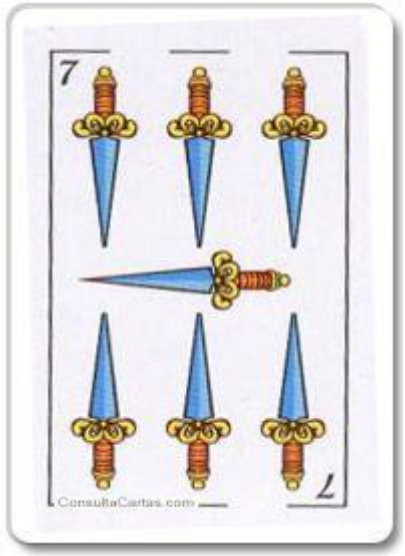
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo:

Sacar una carta de copas o una carta de espadas, son eventos mutuamente excluyentes. Las cartas o son de copas o son de espadas, pero no pueden ser de ambas figuras.



Ejemplo 1:

Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 5 bolas verdes. Si se extrae una bola de la bolsa, cuál es la probabilidad de:

a. Extraer una bola roja:

$$P(R) = \frac{hay\ 4\ bolas\ rojas}{hay\ en\ total\ 14\ bolas} = \frac{4}{17} = 0.2352 = 23.52\%\ de\ probabilidad\ de\ sacar\ una\ bola\ roja$$

Ejemplo 1:

Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 5 bolas verdes. Si se extrae una bola de la bolsa, cuál es la probabilidad de:

b. Extraer una bola roja o negra:

$$P(R \cup N) = P(R) + P(N)$$

$$P(R \cup N) = \frac{hay\ 4\ bolas\ rojas}{hay\ un\ total\ de\ 14\ bolas} + \frac{hay\ 2\ bolas\ negras}{hay\ un\ total\ de\ 14\ bolas} = \frac{4}{14} + \frac{2}{14} = \frac{6}{14} = 0.4285 = 42.85\%$$

Ejemplo 1:

Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 5 bolas verdes. Si se extrae una bola de la bolsa, cuál es la probabilidad de:

c. Extraer una bola no verde:

$$P(R \cup N) = P(R) + P(N)$$

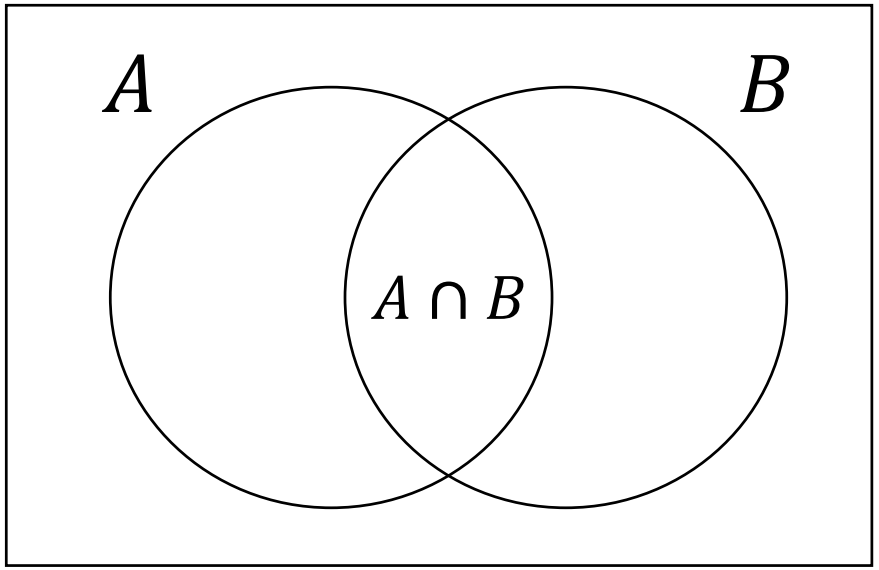
$$P(V') = 1 - P(V) = 1 - \frac{hay\ 5\ verdes}{hay\ en\ total\ 14\ bolas} = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} = 0.6428$$

$$= 64.28\%\ de\ probabilidad\ de\ sacar\ una\ bola\ no\ verde$$

Eventos mutuamente NO excluyentes

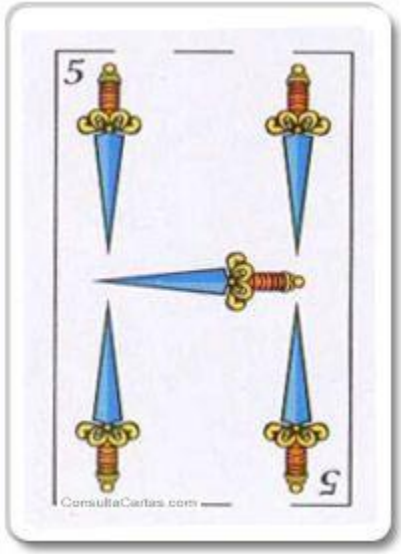
Cuando la ocurrencia de uno de ellos no impide que suceda también otro.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ejemplo:

Sacar un 5 y una carta de espadas, son eventos no excluyentes, puesto que podemos sacar una carta de espadas y que también sea cinco:



Ejemplo 1:

En una escuela de arte que tiene como 90 estudiantes éstos pueden elegir una materia optativa, 30 de ellos toman la clase de escultura y 25 de pintura y 12 toman ambas clases. Si se elige un estudiante al azar, cuál es la probabilidad de que tome la clase de:

a. Sólo escultura:

$$P(e) = \frac{18\ sólo\ estudian\ escultura}{hay\ en\ total\ 90\ estudiantes} = \frac{18}{90} \cong 0.20$$

$$= 20\%\ de\ probabilidad\ de\ seleccionar\ un\ alumno\ al\ azar\ que\ sólo\ estudie\ escultura$$

Ejemplo2:

En una escuela de arte que tiene como 90 estudiantes éstos pueden elegir una materia optativa, 30 de ellos toman la clase de escultura y 25 de pintura y 12 toman ambas clases. Si se elige un estudiante al azar, cuál es la probabilidad de que tome la clase de:

b. Sólo pintura:

$$P(p) = \frac{13\ sólo\ estudian\ pintura}{hay\ en\ total\ 90\ estudiantes} = \frac{13}{90} \cong 0.1444$$

$$= 14.44\%\ de\ probabilidad\ de\ seleccionar\ un\ alumno\ al\ azar\ que\ sólo\ estudie\ pintura$$

Ejemplo3:

En una escuela de arte que tiene como 90 estudiantes éstos pueden elegir una materia optativa, 30 de ellos toman la clase de escultura y 25 de pintura y 12 toman ambas clases. Si se elige un estudiante al azar, cuál es la probabilidad de que tome la clase de:

c. Estudie escultura o pintura, pero no ambas:

$$P(e \cup p) = P(e) + P(p) - P(e \cap p)$$

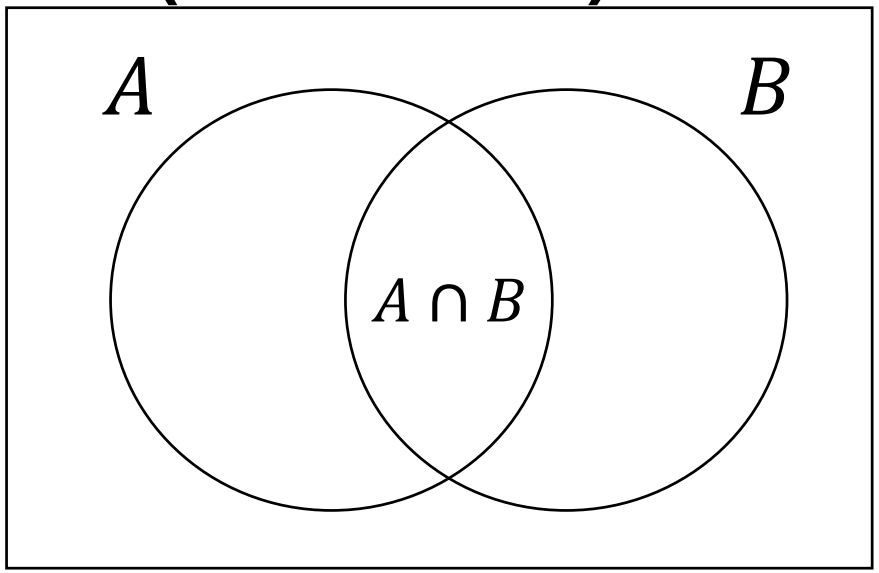
$$P(e \cup p) = \frac{sólo\ 30\ estudian\ escultura}{hay\ en\ total\ 90\ estudiantes} + \frac{sólo\ 25\ estudian\ pintura}{hay\ en\ total\ 90\ estudiantes} - \frac{sólo\ 12\ estudian\ ambos}{hay\ en\ total\ 90\ estudiantes}$$

$$= \frac{30}{90} + \frac{25}{90} - \frac{12}{90} = \frac{43}{90} = 0.4777 = 47.77\%\ de\ probabilidad\ de\ seleccionar\ un\ alumno\ al$$

$$azar\ que\ sólo\ estudie\ escultura\ o\ pintura, pero\ no\ ambas$$

Eventos independientes

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos).



$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo:

El lanzamiento de un dado dos veces es un ejemplo de eventos independientes, ya que no afectan el número que se obtenga en el primer lanzamiento con el que se obtenga en el segundo lanzamiento.

Ejemplo 1:

Al lanzar una moneda común tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que en los tres tiros la cara resultante sea águila?

$$P(a \cap a \cap a) = P(a)P(a)P(a)$$

$$= \left(\frac{un\ águila}{2\ resultados\ posibles}\right)\left(\frac{un\ águila}{2\ resultados\ posibles}\right)\left(\frac{un\ águila}{2\ resultados\ posibles}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$= 12.5\%\ de\ probabilidad\ de\ que\ al\ tirar\ la\ moneda\ tres\ veces\ todas\ sean\ águila$$

Ejemplo2:

Se tiene una urna con 3 canicas verdes, 5 azules y 7 rojas, si se sacan 3 canicas, una después de otra:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?

$$P(v \cap a \cap r) = P(v)P(a)P(r)$$

$$= \left(\frac{tres\ canicas\ verdes}{15\ canicas\ en\ total}\right)\left(\frac{5\ canicas\ azules}{14\ canicas\ en\ total}\right)\left(\frac{7\ canicas\ rojas}{13\ canicas\ en\ total}\right)$$

$$= \frac{3}{15}\frac{5}{14}\frac{7}{13} = \frac{105}{2730} = 0.0384$$

$= 3.84\%\ de\ probabilidad\ de\ que\ al\ sacar\ tres\ canicas, una\ después\ de\ otra, sean\ de\ diferente\ color$

Ejemplo2:

Se tiene una urna con 3 canicas verdes, 5 azules y 7 rojas, si se sacan 3 canicas, una después de otra:

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sean verdes?

$$P(v \cap v \cap v) = P(v)P(v)P(v)$$

$$= \left(\frac{3\ canicas\ verdes}{15\ canicas\ en\ total}\right)\left(\frac{2\ canicas\ verdes}{14\ canicas\ en\ total}\right)\left(\frac{1\ canica\ verde}{13\ canicas\ en\ total}\right)$$

$$= \frac{3}{15}\frac{2}{14}\frac{1}{13} = \frac{6}{2730} = 0.0021$$

$= 0.21\%\%\ de\ probabilidad\ de\ que\ al\ sacarlas\ tres\ canicas, una\ después\ de\ otra, sean\ de\ color\ verde$

Eventos dependientes y probabilidad condicional

Se consideran eventos dependientes cuando la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia de otro, es decir, la ocurrencia de un evento está condicionada a que suceda otro, por lo que es una probabilidad condicional

Eventos dependientes y probabilidad condicional

Si A y B son dos eventos, su ocurrencia se define como la probabilidad de que ocurra el evento A cuando el evento B ya ocurrió o se tiene la certeza de que ocurrirá, y se calcula como:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 1:

Los resultados de una encuesta sobre la actitud política de 334 personas son los siguientes:

	HOMBRES	MUJERES	TOTALES
DERECHA	145	42	187
IZQUIERDA	51	96	147
TOTAL	196	138	334

Ejemplo 1:

Se elige una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que su orientación política sea de derecha y se sabe que es hombre?

$$\mathrm{P}\left(\frac{D}{H}\right) = \frac{(H \cap D)}{P(H)} = \frac{145}{196} = 0.7397$$

$73.97\%\ de\ probabilidad\ de\ que\ se\ sabe\ sea\ de\ derecha\ y\ que\ es\ hombre$

Ejemplo 1:

Esta probabilidad se denomina probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A. Dicho de otro modo, la probabilidad condicionada de un sucedo B respecto de otro A es la probabilidad del suceso B, sabiendo que previamente ha ocurrido del suceso A. De lo anterior se deduce la relación siguiente:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)$$

Ejemplo2:

La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0.4 y la probabilidad de que una mujer casada vea el programa es de 0.5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo hace, es 0.7. Encuentra la probabilidad de que un matrimonio vea el programa.

$$\mathrm{P}(H) = 0.4 \; la\ probabilidad\ de\ que\ el\ hombre\ vea\ televisión$$

$$\mathrm{P}(M) = 0.5 \; la\ probabilidad\ de\ que\ la\ mujer\ vea\ televisión$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{H}{M}\right) = 0.7 \; la\ probabilidad\ de\ que\ una\ mujer\ vea\ televisión\ la\ vea\ el\ hombre$$

$$\mathrm{P}(H \cap M) = P(M)P\left(\frac{H}{M}\right) = 0.5 * 0.7 = 0.35$$

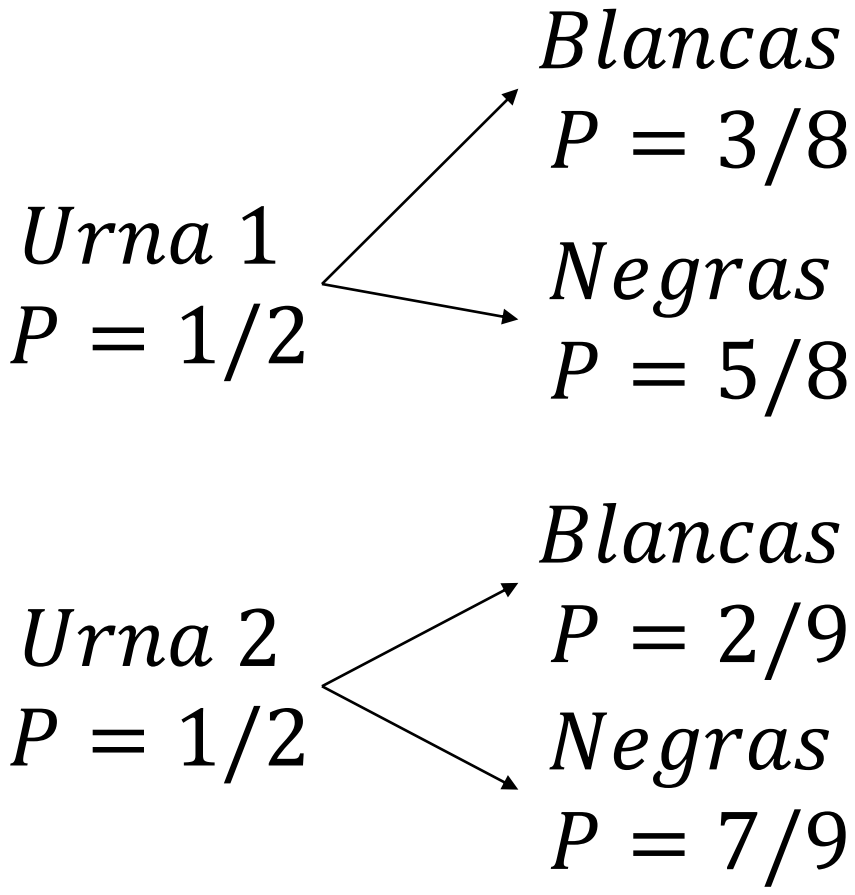
$$= 35\%\ de\ probabilidad\ de\ que\ una\ mujer\ vea\ la\ televisión\ y\ también\ la\ vea\ el\ hombre$$

Ejemplo3:

Se tienen 2 urnas, la primera con 3 bolas blancas y 5 negras, la segunda con 2 bolas blancas y 7 negras. Si se elige una urna al azar y se saca una bola, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea negra?

Cuando se calcula la probabilidad de que ocurran eventos dependientes, es muy útil utilizar un diagrama de árbol colocando sus probabilidades de ocurrencia.

Ejemplo3:


Urna 1
P = 1/2
Blancas
P = 3/8
Negras
P = 5/8
Urna 2
P = 1/2
Blancas
P = 2/9
Negras
P = 7/9

Ejemplo3:

$$\mathrm{P}(negra) = P(urna\ 1)P\left(\frac{negra}{urna\ 1}\right) + P(urna\ 2)P\left(\frac{negra}{urna\ 2}\right)$$

$$\mathrm{P}(n) = P(u1)P\left(\frac{n}{u1}\right) + P(u2)P\left(\frac{n}{u2}\right)$$

$$\mathrm{P}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{5}{16} + \frac{7}{18} = \frac{202}{288} = 0.7013$$

Hay un 70.13% *de probabilidad de sacar una bola negra de cualquiera de las dos urnas*